

第1章 高校数学教師としての心構え

高校数学では，生涯にわたり数学を幅広く活用するためにはどんな能力や態度が必要であるかとの観点から，「数学的活動」，「数学的な見方や考え方」を通して，事象や現象を数学の対象としてとらえる視点と，問題解決能力や考える力の育成を重視しています。

高等学校数学科の目標

数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる。

(高等学校学習指導要領より)



「数学的活動」について

1 「数学的活動」とは

数学的活動には、観察、操作、実験・実習などの外的な活動と、直観、類推、帰納、演繹などの内的な活動が考えられる。

高等学校では特に、次のような思考活動を数学的活動ととらえている。

- ・ 身近な事象を取り上げそれを数学化し、数学的な課題を設定する活動
- ・ 設定した数学的な課題を既習事項や公理・定義等を基にして数学的に考察・処理し、その過程で見いだしたいろいろな数学的性質を論理的に系統化し、数学の新しい理論・定理等（「数学的知識」）を構成する活動
- ・ 数学的知識を構成するに至るまでの思考過程を振り返ったり、構成した数学的知識の意味を考察の対象となった当初の身近な事象に戻って考えたり、他の具体的な事象の考察などに数学的知識を活用したりする活動

```

graph TD
    A[身近な事象] -- 数学化 --> B[公理・定義]
    B -- 数学的考察・処理 --> C[定理]
    C -- 活用・意味付け --> A
    
```

(学習指導要領解説より)

高等学校における数学的活動では、内的な活動が中心となるが、数学化の場面や数学的考察・処理の過程では、外的な活動も含まれている。

2 授業における数学的活動の例

- ・ 身近な事象との関連を一層深める。
 - 水槽に水を入れる（関数）
 - 自動車の速度と停止距離の関係（2次関数）
 - ピラミッドの高さ（三角比）
 - 地震の規模を示すマグニチュード（対数関数）
 - パラボラアンテナの形（2次曲線）
- ・ 問題解決の方法を味わったり、自ら思考過程を振り返ったり、発展的に考えたりなど、数学的考察・処理の質を高めることのできる問題を取り入れていく。
 - 場合分けの必要な問題
 - パラメータを含む問題
 - 複数の解法を比較できる問題
 - 複数の内容領域が融合した問題
- ・ 見いだした数学的知識の意味を身近な事象に戻って味わったり、いろいろな場面で活用できるようにする。
 - コピー機での拡大縮小(図形の計量)
 - 宝くじの当たる確率と期待値(確率)
 - 預貯金やローン(数列)
 - バクテリアの増殖(指数関数)
 - 最低何票で当選するか(統計処理)
 - 自分の偏差値(統計とコンピュータ)

高等学校の段階においては、新しい概念の導入や理論の拡張が、いつも実際的な問題から始まるわけではなく、純粋に数学的な問題から始まることもある。しかし、その際においても、コンピュータやグラフ表示ができる電卓、情報通信ネットワークなどを積極的に活用することで、この活動の趣旨を生かすことが重要である。

数学的な見方や考え方

- 1 数学的な見方や考え方とは
数学的な見方や考え方には，大きく分けて次の二つがある。

数学が構成されていくときの中心となる「見方や考え方」
数学の原理・法則の基礎を支えている考え方
数学を活用していくときの「見方や考え方」
問題解決のための手だてや着眼点，知識や技能を引き出す原動力となるもの

これら「数学的な見方や考え方」のよさは，簡潔さ，明瞭さ，的確さであり，それに基づいて事象を定式化することである。そして，「よさの認識」は，数学を活用しようとする意欲を高め，広く知性をはぐくむことにつながる。

- 2 授業における「数学的な見方や考え方」
「数学的な見方や考え方」について，以下に具体例を挙げて紹介する。しかし，これらの例がすべてではない。教師や生徒が気付いたものに「 の考え方」などとネーミングし，見方や考え方を広げたり，深めたりしていけばよい。

演繹的な考え方

前提として与えられた幾つかの命題から，論理的規則を用いて必然的結論を導き出そうとする考え方。

- (例) 不等式の基本性質

$$a > b \text{ のとき, } a + c > b + c$$

$$a > b, c > 0 \text{ のとき, } ac > bc$$

， を前提として，

$$2x + 1 > 0 \text{ を解く。}$$

帰納的な考え方

個々の具体的な例から推測することにより，共通に成り立つ一般的なルールや性質を見付けだそうとする考え方。

- (例) 導関数の定義に従って3次関数まで微分し， n 次関数の場合について考える。

$$(x) = 1$$

$$(x^2) = 2x$$

$$(x^3) = 3x^2$$

：

$$(x^n) = nx^{n-1}$$

一般化の考え方

一つの対象において一般性を見いだしたり，その対象を含む集合全体で成り立つ一般性を求めようとする考え方。

- (例) 指数を自然数から，整数，有理数に拡張した場合

$$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

と定義すると，

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, (a^m)^n = a^{mn}$$

が成り立つ。

記号化の考え方

事象などを数量や図形などの記号で表わしたり，さらにその記号を処理するルールを定め，これに基づいて形式的に処理したりする考え方。

- (例) みかん，りんご，かきの3種類の果物から6個を選ぶ方法が何通りあるかを考えるとき，

$$\begin{array}{c} \text{みかん} \quad | \quad \text{りんご} \quad | \quad \text{かき} \\ \hline \end{array}$$

のように， $(3 - 1)$ 個の仕切りと6個の の順列で考える。

特殊化の考え方

ある事象を明確にとらえようとするとき、特別な場合、すなわちその事象の一部を考えることにより、一般的な考察に生かそうとする考え方。

(例) 特殊な場合を一般の考察に生かす

2つの自然数 $a, b (a < b)$, 素数 p について, a と b の間にあって, p を分母とする既約分数の和を求めるとき, 具体的に $a=3, b=6, p=5$ として考えて求める。

$$3 = \frac{15}{5} < \frac{16}{5} < \frac{17}{5} < \frac{18}{5} < \dots < \frac{29}{5} < \frac{30}{5} = 6$$

統合的な考え方

多くの孤立した事柄について, より広い観点から本質的な共通性を抽象し, 同じものとしてまとめていこうとする考え方。

(例) 関数と方程式の関連を考える

2次関数のグラフと
 x 軸との位置関係
頂点の y 座標の符号

共有点の個数

判別式の符号

2次方程式の
実数解の個数

発展的な考え方

一つのことが得られても, 更によりよい方法を求めたり, これを基にして, より発展的な, より新しいものを発見していこうとする考え方。

(例) 順列を発展させて円順列や立体の塗り分けへ

n 人が1列に並ぶ方法

$$n! \text{ (通り)}$$

n 人が円形に並ぶ方法

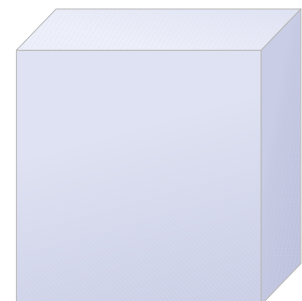
$$\frac{n!}{n} = (n-1)! \text{ (通り)}$$

正四角錐の側面と底面を5色に塗り分けるときの塗り分け方

$$5 \cdot (4-1)! \text{ (通り)}$$

立方体の各面を6色に塗り分けるときの塗り分け方

$$5 \cdot (4-1)! \text{ (通り)}$$



授業に当たって

学校における教育活動の大半は授業であり、教師が生徒と接する時間の多くが授業である。それゆえ、授業は教科指導の場であるとともに、生徒を理解し、生徒との信頼関係を築く場でもある。生徒との信頼関係がなければ、生徒指導、進路指導など、教育活動の様々な場面で支障を来すことになりかねない。その意味で、教科指導ができるのはもちろんのこと、生徒理解ができ、生徒との信頼関係が築ける授業がよい授業と言える。よい授業のできる教師は、生徒指導、進路指導などにおいても力量の発揮できる教師である。

1 綿密な教材研究をしよう

教材とは、ある教育目標を達成するために選ばれた文化的素材のことを言う。よい学習指導をするには事前の研究が欠かせない。教材研究の深さによって、授業のよしあしは大きく左右される。

(1) 教材の価値を吟味する

教材を選ぶとき、設定した指導目標をどの程度達成できるのか、どのような教育効果をもたらすのか等を事前に検討しなければならない。

よい教材とは、「おもしろくてだれにでもでき、多様な考えと発展性があるもの」である。

(2) 教材の配列を工夫する

生徒の興味や関心、他の教材との関連を考えて配列する。

(3) 教材の発展性を探る

ある教材について、その題材の範囲内で考えるだけでなく、その教材の発展方向、系列を考えておくと指導展開が弾力に富んだものとなる。(教材の例参照)

2 指導の方法を工夫しよう

(1) 指導計画の立案

一つの単元を指導する前に、その単元で指導すべき内容がどれくらいあるのかを細かく列挙する必要がある。指導内容が多い場合などは、生徒の学力に合わせて取捨選択し、教材を精選することが大切である。(p.8, p.14, p.19参照)

(2) 授業展開の具体化

授業のねらいを明確にするとともに、教師が教えること、生徒に考えさせること、発問することなど、細部に至るまで授業展開を具体的にしておくことが大切である。また、板書の内容や方法もあらかじめ具体化しておく必要がある。

(p.9参照)

(3) 個を生かす

生徒が主体的に取り組める学習の場を設定し、生徒を生かすような授業計画にする。(p.20, p.21参照)

(4) 教具

コンピュータ、実物模型などの様々な教具を効果的に用いれば、生徒の関心・意欲は高まり、理解を一層深めることができる。(p.28, p.30参照)

(5) 生徒の興味・関心を高める話題

授業の流れの中に取り入れるトピックなどは関心を高めたり、理解を深めたりする重要な要素となり得る。日ごろから話題の収集に努めるようにしたい。

(6) 家庭学習

学校での授業と家庭学習とがかみ合ってこそ、学習意欲が高まり、学習方法も身に付くようになる。家庭学習をしたくなるように、また、しやすくなるように授業計画を工夫したい。(p.15参照)

評価方法について

教育における「評価」とは、ある教育活動に対して、そのねらいがどの程度実現されているかを一定の規準・基準に照らして確認することである。この教育活動には生徒の活動だけでなく、教師の活動も含まれる。カリキュラムも、教材も、指導法もすべてが評価の対象である。評価はその価値や成果を判断し、不足している部分を補う目的で行い、教育活動をより効果的なものにするためのものである。

1 生徒に対する評価

数学科の評価の観点には、次の四つが挙げられる。

関心・意欲・態度	数学的活動を通して、数学の論理や体系に関心をもつとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを事象の考察に積極的に活用しようとする。
数学的な見方や考え方	数学的活動を通して、数学的な見方や考え方を身に付け、事象を数学的にとらえ、論理的に考えるとともに思考の過程を振り返り多面的・発展的に考える。
表現・処理	事象を数学的に考察し、表現し処理する仕方や推論の方法を身に付け、よりよく問題を解決する。
知識・理解	数学における基本的な概念、原理・法則、用語・記号などを理解し、知識を身に付けている。

学ぶ意欲の低下が社会的に問題になっており、関心・意欲・態度などの情意的側面がクローズアップされるようになった。情意的な側面はその測定が大変難しい。そこでどのような行動が「関心・意欲・態度」に当たり、どういった見方や考え方が「数学的な見方や考え方」に当たるのかを具体的に整理し、各学校が生徒の実態に即して、

科目ごとに観点別評価規準表を作成し、それを基に評価していくことが求められている。評価は授業中のあらゆる場面を通じて日常的に行われるものであり、いわゆる成績の評定付けを行うこととは異なる。「評定」は生徒のある側面をとらえて数値化したり、記号化したりするなど、第三者による客観的価値決定であり、評価の一側面である。

また、評価規準は生徒や保護者にも知らせることが望ましく、生徒自身が目標をもって学習に取り組んだり、自己評価をさせることによって意欲を引き出したりするなど効果的に活用することが必要である。

2 授業に対する評価

授業に対する評価とは、授業中の生徒一人一人を十分に観察し、理解の状況を確認しつつ、生徒の実態に合った授業であるかどうかを評価することである。評価は一般に授業中、あるいは授業後に行うものであり、その結果を、生徒の学習にも自身の指導にもフィードバックしなければならない。

活用できる評価結果を得るためには、指導目標とともに、評価項目とその評価基準を設定しておく必要がある。1時間の授業展開のうち、どの場面で何をどう評価するのか、授業計画として練り上げておくことが大切である。

また、テストなどの傾向から、指導法に改善の必要があると自分で感じる場合だけでなく、指導法に関する生徒の声にも耳を傾け、謙虚に自己評価し、修正する姿勢をもちたい。

以上のように、指導と評価は様々な意味で一体化したものである。